Lec 1 数列极限

1.1 几个常用的记号

1. $\forall \leftarrow A \leftarrow any$: 任意给定的一个；给定后为常数
2. $\exists \leftarrow E \leftarrow exist$: 存在一个；通常不唯一
3. $\sup E$: 数集 E 的最小上界，即 E 的上确界 (supremum)
   $\sup E$ 同时满足两条件：
   (a). $\forall x \in E, x \leq \sup E$;
   (b). $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, \sup E - \varepsilon < x_0$.
4. $\inf E$: 数集 E 的最大下界，即 E 的下确界 (infimum)
   $\inf E$ 同时满足两条件：
   (a). $\forall x \in E, x \geq \inf E$;
   (b). $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, x_0 < \inf E + \varepsilon$.

定义 1.1

1. $\sup E = \inf\{u \in \mathbb{R} : u \geq x, \forall x \in E\}$;
2. $\inf E = \sup\{u \in \mathbb{R} : u \leq x, \forall x \in E\}$.

♣

例 设 $E = \{1, 3, 5, 8\} F = (-\sqrt{3}, \pi]$, 则:

$\sup E = 8, \inf E = 1, \sup F = \pi, \inf F = -\sqrt{3}$. 且有

1. $\sup E = -\inf(-E)$;
2. $\inf F = -\sup(-F)$;

注 这里的 $-E$ 表示 E 的相反数集合，即 $-E = \{-e : e \in E\}$.

1.2 数学分析建立在实数系上 $\mathbb{R}$ 上

理由: 极限运算时微积分的最基本运算, 而有理数集合 $\mathbb{Q}$ 关于极限运算时不封闭的. 例如: $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e; \forall n \in N, (1 + \frac{1}{n}) \in \mathbb{Q}$, 但 $e \notin \mathbb{Q}$. 又如,$\forall n \in N, a_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} \in \mathbb{Q}$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6} \notin \mathbb{Q}$.

实数集合 $\mathbb{R}$ 在数轴上的点是连续不断的, 且关于极限运算时封闭的. 因此, 称实数集 $\mathbb{R}$ 是具有连续性. 实数集 $\mathbb{R}$ 的连续性也称为实数集的完备性.

描述实数集 $\mathbb{R}$ 连续性的公理通常有五个:

1. 确界存在原理;
2. 单调有界极限存在准则;
3. 极限存在的柯西 (Cauchy) 准则;

4. 闭区间套定理;
5. 列紧性原理, 即有界数列必有收敛子列定理.

这五个公理是互相等价的, 本课程采用**确界存在原理**作为实数集 $\mathbb{R}$ 连续性的公理.

注 这五条公理与课本 1.1.3 的连续性公理是等价的, 即任意一个公理都可以推导出另外四个公理. 因此这里说这五个等价命题描述了 $\mathbb{R}$ 的连续性.

定理 1.1 (公理: 确界存在原理)

有上 (下) 界的非空实数集 E 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.

1.3 数列极限的科学定义

设数列 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 科学的定义如下:

定义 1.2 (数列极限)

对于数列 $\{a_n\}$, 若 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in N^*, \forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立, 则 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n\to a(n\to\infty)$.

我们判断数列是否收敛, 就是判断其是否满足数列极限存在的定义**??**. 除此之外, 也可以使用如下的性质:

命题 1.1

对于数列 $\{a_n\}$, 以下命题等价:

1. $\forall\varepsilon>0, \exists N\in N^*, \forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立;
2. 存在常数 M, 使得 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in N^*, \forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ 成立;

事实上, 所有的收敛的有理数列, 其极限点的全体即是实数集 $\mathbb{R}$. 即实数集 $\mathbb{R}$ 是有理数列的极限值构成的.

注

1. $\mathbb{Q}$ 对极限是不封闭的;
2. 由 $\mathbb{Q}$ 组成的数列的极限可以是实数;
3. 由 $\mathbb{Q}$ 组成的数列的极限只能是实数;
4. 由 $\mathbb{Q}$ 组成的所有收敛数列, 他们的极限的集合, 恰好就是 $\mathbb{R}$, 不多不少.

理由如下:

对 $\forall x\in\mathbb{R}$, 设 x 的小数表示为: $x=a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 则有理数列: $a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, \cdots$ 当 $n\to\infty$ 时, 其极限为 x. 若 x 是有理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是有限小数或循环小数, 若 x 是无理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是无限不循环小数, 则极限点 x 是无理数.

此处 $x=a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 其中每一个 a_i 都是一个数字, a_0 是整数部分, $a_1a_2a_3\cdots$ 是小数部分. 比如, $x=3.1415926\cdots$, 那么 $a_0=3, a_1=1, a_2=4, a_3=1, a_4=5, a_5=9, a_6=2, a_7=6, \cdots$.

可以由 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 构造出一个数列 $\tau_1 = a_0, \tau_2 = a_0.a_1, \tau_3 = a_0.a_1a_2, \cdots$, 说 x 为极限指的, 是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = x$. 都用 x 代指, 是因为我这里不能确定 x 是不是有限小数, 有理数还是无理数. 但是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限是确定的.

1.4 极限存在的两个常用准则

定理 1.2 (单调有界极限存在准则)

若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n(\inf a_n)$.

证明 单调增有界极限存在.

设数列 $\{a_n\}$ 单调增且有上界, 由确界存在定理,$\{a_n\}$ 有上确界. 令 $\sup a_n = \beta$, 则 β 是 $\{a_n\}$ 满足以下两点:

1. $\forall n \in N, a_n \le \beta$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in \{a_n\}, \beta - \varepsilon < a_{n_0}$.

又因为 $\{a_n\}$ 单调增, 故 $\forall n > n_0, a_n \le a_{n_0} > \beta - \varepsilon$, 且 $a_n \ge \beta < \beta + \varepsilon$. 即 $|\beta - a_n| < \varepsilon$ 在 $n > n_0$ 时成立.

由定义**??**, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta = \sup\{a_n\}$. 同理, 单调减有下界极限存在.

定理 1.3 (夹逼准则)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_n \le b_n \le c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

证明 从 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in N^*, \forall n > N_1$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon. \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ 当 $n > N_1$ 时恒成立.

再从 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Rightarrow$ 对上述 ε , $\exists N_2 \in N^*, \forall n > N_2$ 都有 $|c_n - a| < \varepsilon. \Rightarrow a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$ 当 $n > N_2$ 时恒成立.

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, $a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$, 即 $|b_n - a| < \varepsilon$ 成立. 由定义**??**, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

例 1.1 下列 a, b, q, c_1, c_2 皆为常数.

1. 设 $|q| < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0$;
2. 设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$;
3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} (c_1a_n + c_2b_n) = c_1a + c_2b$. **即线性组合的极限等于极限的线性组合, 称此为极限的线性性质.**

证明

1. (a). 当 $q = 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;

   (b). 当 $0 < |q| < 1$ 时, 对 $\forall 0 < \varepsilon < 1$, 使得 $|q^n - 0| < \varepsilon$, 只要 $n \ln |q| < \ln \varepsilon$, 即 $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$,

令 $N=[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}]+1$, 则当 $n>N$ 时, $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\Rightarrow|q^n-0|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}aq^n=0$.

综上可知, $\lim\limits_{n\to\infty}aq^n=0,\forall|q|<1$.

2. (a). 当 $a>1$ 时, 则 $a^{\frac{1}{n}}>1$, 设 $a^{\frac{1}{n}}=1+\lambda_n$, 则 $a=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\dfrac{n(n-1)}{2!}\lambda_n^2+\cdots+\lambda_n^n>n\lambda_n$, 则 $0<\lambda_n<\dfrac{a}{n}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n}=0$, 由夹逼准则**??**, $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

   (b). 当 $0<a<1$ 时, 令 $b=\dfrac{1}{a}$, 则 $b>1$, 由上一步可知 $\lim\limits_{n\to\infty}b^{\frac{1}{n}}=1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

   注 助教: 我觉得最后一步的说明有一点跳步, 讲义使用了 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b^{1/n}}=\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty}b^{1/n}}=1$. 中间第二个等号是未证明的, 这个将在之后极限的四则运算得到证明.

3. 当 $n\geqslant 2$ 时, $\sqrt[n]{n}\geqslant 1$, 设 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n$, 则 $\lambda_n>0$. 且 $n=(1+\lambda_n)^n>\dfrac{n(n+1)}{2}\lambda_n^2$, 则 $0<\lambda_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}=0$, 由夹逼准则**??**, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

4. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in N^*$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 对上述 $\varepsilon>0,\exists N_2\in N^*$, 当 $n>N_2$ 时, $|b_n-b|<\varepsilon$. 令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon,|b_n-b|<\varepsilon$, 则 $|c_1a_n+c_2b_n-c_1a-c_2b|=|c_1(a_n-a)+c_2(b_n-b)|\leqslant|c_1(a_n-a)|+|c_2(b_n-b)|\leqslant(|c_1|+|c_2|)\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_1a_n+c_2b_n)=c_1a+c_2b$.

   注 证明数列极限时, 需要证明 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*$, 当 $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 如果我们能证明 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*$, 当 $n>N$ 时, $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$ 也是可以的. 可以思考一下这是为什么? 提示:**??**.

数列的极限具有线性性质, 同理函数极限也是具有线性性质的, 统称为极限的线性性质. 由极限的线性性质, 可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质. 如函数的导数、导数、微分、积分, 都具有线性性质.

✍ 作业 ex1.2:1(2)(4),3,4,5,6,8(5),15(1),19.